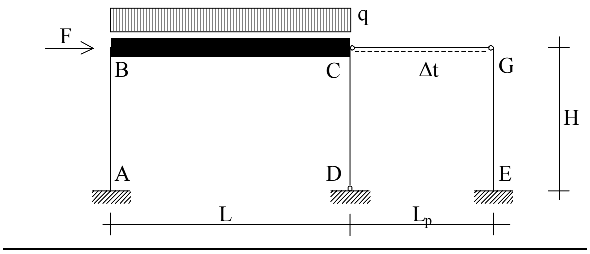
Università degli Studi di Salerno – Facoltà di Ingegneria
Corso di Tecnica delle Costruzioni I – Nuovo Ordinamento
2ª Prova intercorso - 28/06/2005
Anno accademico 2004-2005

Esercizio n. 1 (Punti 8)

Si analizzi la struttura rappresentata nella figura seguente per la quale si assumono i seguenti valori numerici delle grandezze geometrico-meccaniche:

Sezioni
Tratti AB – CD - EG
b=30 cm; h=20+5 *N* [cm]
Pendolo CG
b_p=h_p =20+2 *C* [cm]
Dimensioni
L=1.0+2 (*N*+*C*+*M*)/10 [m]
L_p=2.0 (*N*+*C*)/10 [m]
H=1.0+2 (*N*+*C*)/10 [m]
Azioni
F= 10+2*M* [kN]
q= 10+2*N* [kN/m]
Δt= *N*+*C*+*M* [°C]

α = *0.00001* [$°C^{-1}$]
Calcestruzzo
R_{ck}= 25.0 MPa

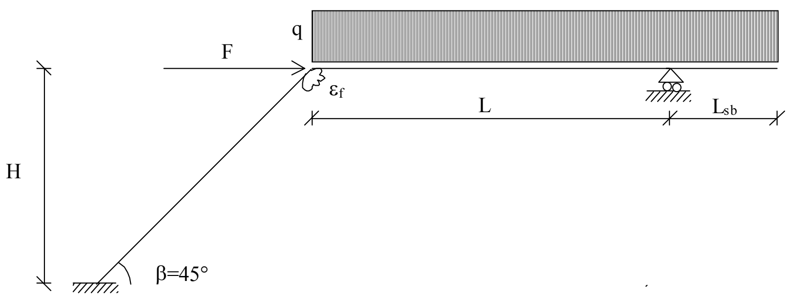


Si traccino i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione (N,T,M).

N.B.: in questo esercizio e nei seguenti si indica con *N* ed *C* il numero di lettere che costituiscono rispettivamente il nome e cognome del candidato. *M* è l'ultima cifra del numero di matricola.

Esercizio n. 2 (Punti 14)

Con i dati relativi alle dimensioni dello schema e delle sezioni ed alle caratteristiche dei materiali introdotti nell'esercizio recedente si analizzi la struttura in figura rappresentandone i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione:

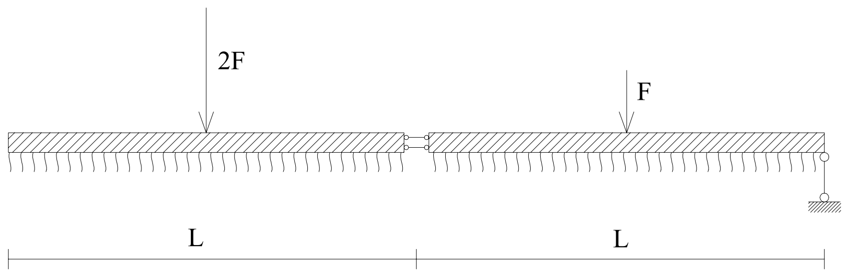


ε_φ=L/10EI

Si assuma L_{sb}=L/5.

Esercizio n. 3 (Punti 8)

Ancora con riferimento agli stessi dati del rimo esercizio si risolva la trave di fondazione rappresentata nella figura seguente tracciandone i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione (N, T, M):



k_0=0.01 N/mm^3

B=80+5 *M* [cm]

Esercizio n. 1

– Dati numerici

$b = 30\,cm$;

$h = 40\,cm$

$L = 5.4\,m$

$H = 3.8\,m$

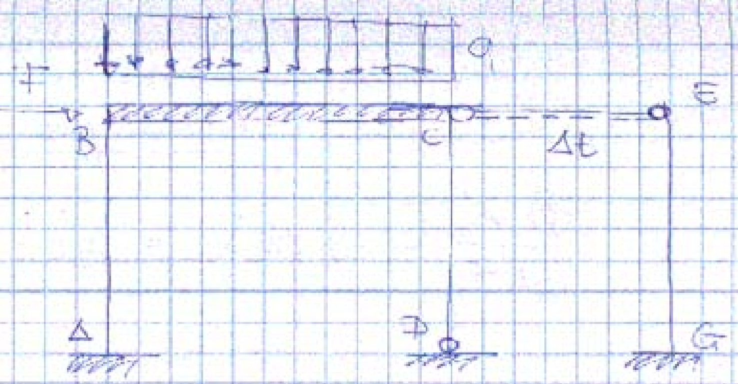
$L_p = 2.8\,m$

$F = 26\,kN$

$q = 18\,kN/m$

$\Delta t = 22°C$

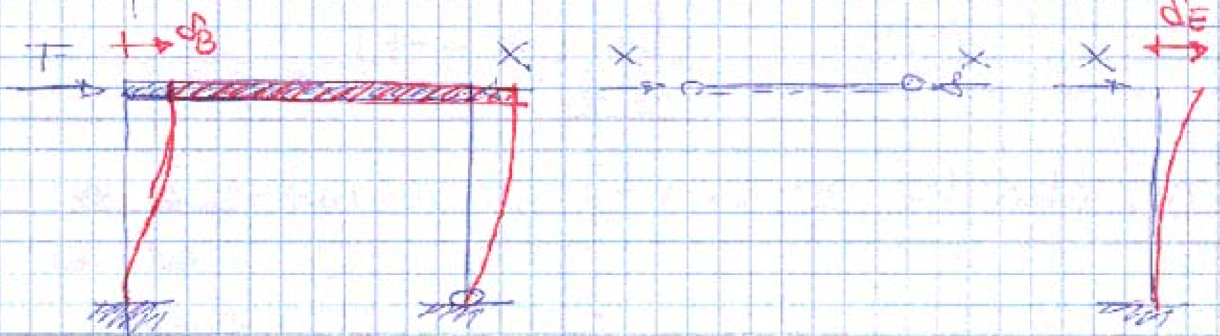
$\alpha = 10^{-5}\,°C^{-1}$



$b_p = h_p = 40\,cm$

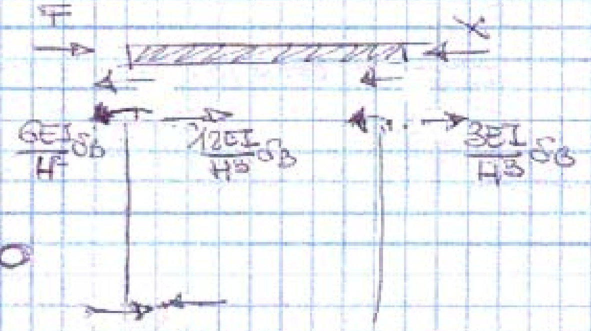
$R_{ck} = 25.0\,MPa$ $\quad E_c = 28817\,MPa$

– Impostazione



– Scrittura delle equazioni di equilibrio e congruenza.

– equilibrio del traverso alla traslazione orizzontale



$$(1)\quad F - \frac{12EI}{H^3}\delta_B - \frac{3EI}{H^3}\delta_B - X = 0$$

– ~~spostamento~~ orizzontale del punto E

(2) $\delta_E = \dfrac{X H^3}{3EI}$

– equazione di congruenza

(3) $\underbrace{\delta_E - \delta_C}_{\substack{\uparrow \\ \text{allungamento} \\ \text{del pendolo}}} = \delta_E - \delta_B = \alpha \Delta t\, l_p - \dfrac{X\, l_p}{E A_p}$

SOLUZIONE

Dalla (1) si ha

$$\delta_B = (F - X)\frac{H^3}{15EI} \qquad (1')$$

e sostituendo la (1') e la (2) nella (3) si ha

$$\frac{X H^3}{3EI} - (F - X)\frac{H^3}{15EI} + \frac{X\, l_p}{E A_p} = \alpha \Delta t\, l_p$$

$$X\left[\frac{H^3}{3EI} + \frac{H^3}{15EI} + \frac{l_p}{E A_p}\right] = \alpha \Delta t\, l_p + \frac{F H^3}{15EI}$$

$$X = \frac{\alpha \Delta t\, l_p + \dfrac{F H^3}{15EI}}{\dfrac{2}{5}\dfrac{H^3}{EI} + \dfrac{l_p}{E A_p}}$$

I valori di δ_E e δ_B possono ricavarsi dunque da (1) e (

Esercizio n. 2

- Dati numerici

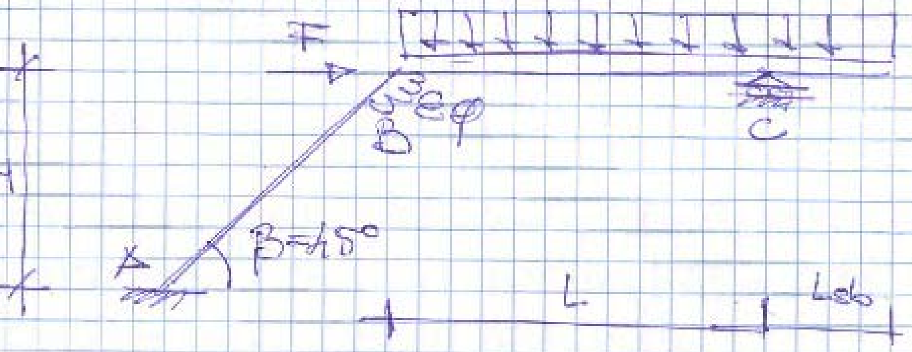
$L = 5.4\ m$

$H = 3.8\ m$

$L_{sb} = 1.08\ m$

$b = 30\ cm$

$h = 40\ cm$



$q = 18\ KN/m$ $\quad F = 26\ KN$ $\quad E_c = 9500\,(f_{ck}+8)^{1/3} = 28847\ MPa$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{300 \cdot 400^3}{12} = 1{,}60 \cdot 10^9\ mm^4$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{L}{10EI} = \frac{5400}{10 \cdot 28847 \cdot 1.60 \cdot 10^9} = 1.16994 \cdot 10^{-11}$$

- Risoluzione secondo il metodo degli spostamenti
- Incognite

La struttura ~~ha~~ è ad un nodo spostabile per cui le incognite sono

$$\{\varphi_B, \delta_B\}$$

essendo δ_B lo spostamento orizzontale del punto B.

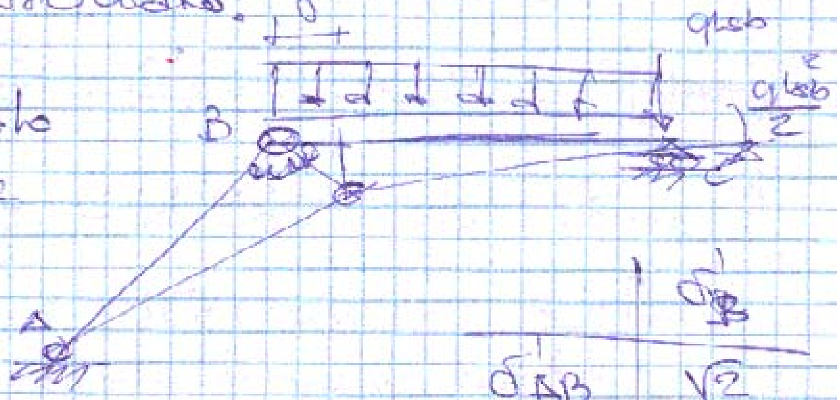
– Equazioni

La prima equazione traduce la condizione di equilibrio alla rotazione nel nodo B

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

La seconda rappresenta un equilibrio globale imposto con il formalismo del PLV applicato alle forze ed alle coppie nodali che agiscono sul sistema articolato associato.

Nella figura è rappresentato un possibile cinematismo cui può essere soggetta questa struttura.



	δ'_B
δ'_{AB}	$\sqrt{2}$
δ'_{BC}	-1

Il PLV si scrive come

$$(M_{BA}+M_{AB})\frac{\delta'_{AB}}{l_{AB}} + (M_{BC}+M_{CB})\frac{\delta'_{BC}}{l_{BC}} + F\,\delta'_B + qL\cdot\frac{\delta'_{BC}}{2}$$

da cui

$$\left(\frac{M_{AB}+M_{BA}}{H} - \frac{M_{BC}+M_{CB}}{L} + F - \frac{qL}{2}\right)\cdot\delta'_B = 0$$

Per l'arbitrarietà di δ'_B si deve avere

$$\frac{M_{AB}+M_{BA}}{H} - \frac{M_{BC}+M_{CB}}{L} + F + \frac{qL}{2} = 0$$

Espressione dei momenti ~~ast~~ per ASTA

- ASTA AB
  - Coefficienti di rigidezza

Dapprima possono valutarsi i coefficienti di deformabilità

$$\alpha_{AB} = \frac{H\sqrt{2}}{3EI} = 3.88104 \cdot 10^{-11} \, (Nmm)^{-1}$$

$$\alpha_{BA} = \frac{H\sqrt{2}}{3EI} + \varepsilon_{\varphi} = 5.05098 \cdot 10^{-11} \, (Nmm)^{-1}$$

$$\beta = \frac{H\sqrt{2}}{6EI} = 1.94052 \cdot 10^{-11} \, (Nmm)^{-1}$$

Quindi si determinano i coefficienti di rigidezza che tengono conto anche della deformabilità concentrata

$$W_{AB} = \frac{\alpha_{BA}}{\alpha_{AB}\alpha_{BA}-\beta^2} = 3.18927 \cdot 10^{10} \, Nmm$$

$$W_{BA} = \frac{\alpha_{AB}}{\alpha_{AB}\alpha_{BA}-\beta^2} = 2.45055 \cdot 10^{10} \, Nmm$$

$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{\beta}{\alpha_{AB}\alpha_{BA}-\beta^2} = 1.22527 \cdot 10^{10} \, Nmm$$

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}+V_{AB}}{\sqrt{2}H} = 8.21461 \cdot 10^{6} \, N$$

$$U_{BA} = \frac{W_{BA}+V_{BA}}{\sqrt{2}H} = 6.84000 \cdot 10^{6} \, N$$

Sostituendo nelle equazioni di equilibrio si ha

$$(W_{BA}+W_{BC})\cdot\varphi_B-(U_{BA}-U_{BC})\delta_B=-\mu_{BC}$$

$$\frac{V_{AB}\varphi_B-U_{AB}\sqrt{2}\delta_B+W_{BA}\varphi_B-U_{BA}\sqrt{2}\delta_B}{H}+\frac{W_{BC}\varphi_B+U_{BC}\delta_B+\mu_{BC}+\frac{qL_{sb}^3}{2}}{L}+F+\frac{qL}{2}=0$$

$$-\left(\frac{W_{BA}+V_{AB}}{H}-\frac{W_{BC}}{L}\right)\varphi_B+\left[\frac{(U_{AB}+U_{BA})\sqrt{2}}{H}+\frac{U_{BC}}{L}\right]\delta_B=F+\frac{qL}{2}+\frac{qL_{sb}^3}{2L}$$

da cui in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} W_{BA}+W_{BC} & -(U_{BA}-U_{BC}) \\ -(U_{BA}-U_{BC}) & \frac{U_{AB}+U_{BA}}{H}+\frac{U_{BC}}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_B\\ \delta_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mu_{BC}\\ F+\frac{qL}{2}+\frac{qL_{sb}^3}{2L}\end{bmatrix}$$

e, numericamente,

$$\begin{bmatrix} 5.01478\cdot10^{10} & -4.92464\cdot10^{6} \\ -4.92464\cdot10^{6} & 6482.11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_B\\ \delta_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.03612\cdot10^{7}\\ 8.384\cdot10^{4}\end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema si ha

$\varphi_B = 0.0026717 \qquad \delta_B = 14.964 \text{ mm}$

CALCOLO DEI MOMENTI

- ASTA AB

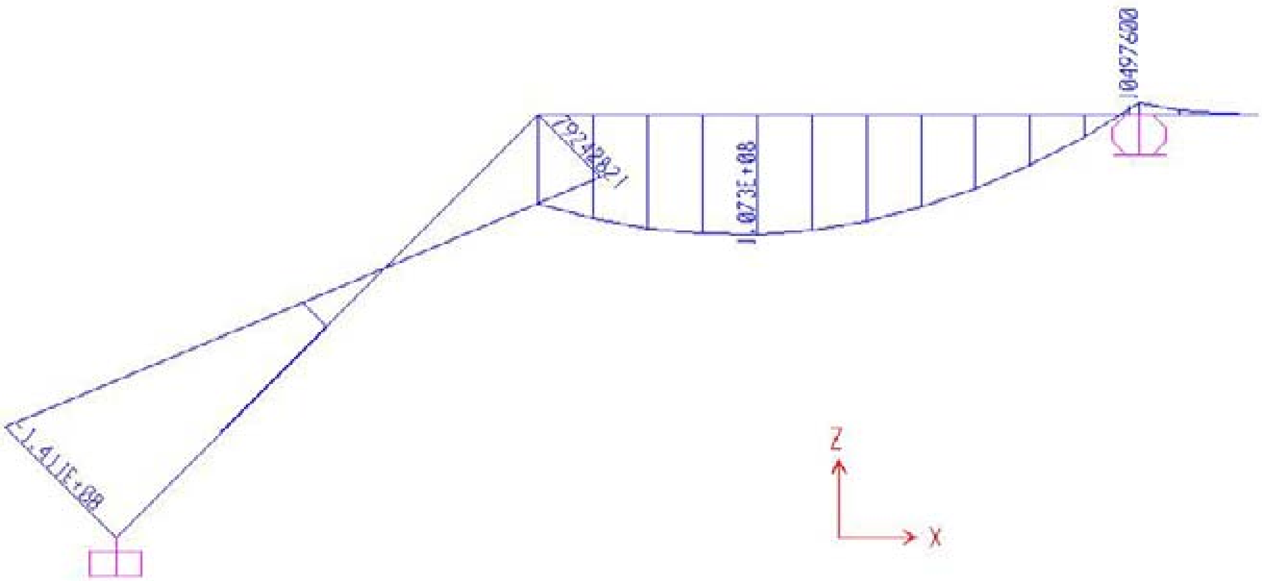
$$M_{AB} = W_{AB} \cdot \varphi_B - U_{AB} \sqrt{2}\, \delta_B = -1.41087 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$
$$= -141{,}087 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = W_{BA} \varphi_B - U_{BA} \sqrt{2}\, \delta_B = -79.2428 \text{ KNm}$$

- ASTA BC

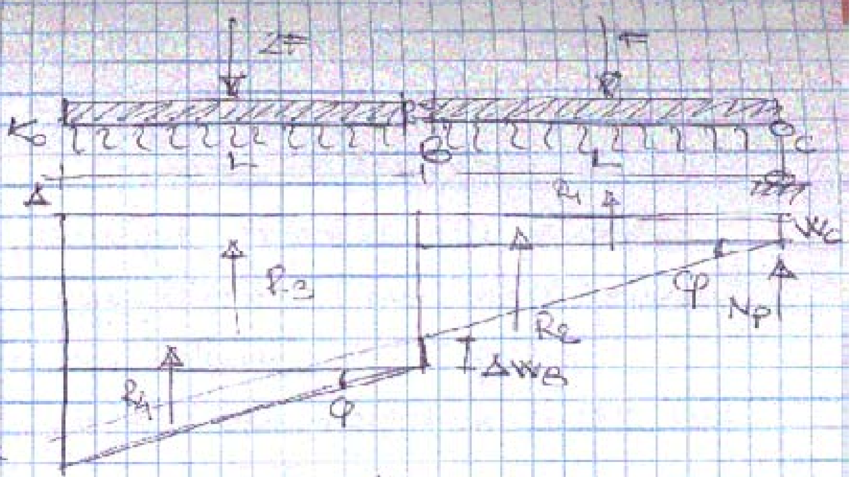
$$M_{BC} = W_{BC} \varphi_B + V_{BC} \delta_B + \mu_{BC} = 79.2428 \text{ KNm}$$

$$M_{CB} = \frac{q L_{sb}^2}{2} = 10{,}497 \text{ KNm}$$



Esercizio n. 3.

- Dati numerici



$L = 5.10\,m$

$B = 1.20\,m$

$K_0 = 0.01\,N/mm^3$

$F = 260\,KN$

- Incognite.

La parametrizzazione del campo di spostamenti richiede tre parametri di spostamento reciprocamente indipendenti come i seguenti:

$$(w_C,\ \varphi,\ \Delta w_B)$$

In funzione di tali parametri che rappresentano le incognite principali del problema si possono esprimere le risultanti R_i della reazione del terreno e lo sforzo normale N_p che sollecita il pendolo. Per questo passaggio si utilizza la relazione che lega la reazione per unità di lunghezza $p(t)$ allo spostamento $w(t)$:

$$p(t) = B\,q_t(t) = B K_0\, w(t) = K\, w(t)$$

da cui:

$$R_1 = K w_C \cdot L \;;\; R_2 = K \varphi \cdot L \cdot L/2 \;;\; R_3 = K(w_C + \Delta w_B + \varphi L)L$$

$$R_4 = K \varphi L \cdot L/2 \;,\; N_p = \frac{EA_p}{L_p}\, w_C$$

Scrittura delle equazioni

Il campo di spostamenti descritto dalle incognite w_C, Δw_B, φ è stato costruito nel rispetto delle condizioni di congruenza dettate dai vincoli.

~~Affinché~~ Bisogna, dunque, imporre un numero di condizioni di equilibrio (non interdipendenti) sulla struttura o su alcune sue parti:

1ª equazione: eq. globale alla traslazione in dir. vert.

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + N_p - 2F - F = 0 \qquad (1)$$

2ª equazione: eq. globale alla rotazione intorno a C

$$R_1 \cdot \frac{L}{2} + R_2 \cdot \frac{2}{3} L + R_3 \frac{3}{2} L + R_4 \frac{5}{3} L - 2F \cdot \frac{3}{2} L - F \frac{L}{2} = 0 \qquad (2)$$

3ª equazione: eq. ~~al~~ alla traslazione del tratto AB

$$R_3 + R_4 - 2F = 0$$

Sostituendo le espressioni delle reazioni in funzione delle incognite si ha il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} 2kL + \frac{EA_p}{L_p} & 2kL^2 & kL \\ 2kL^2 & \frac{8}{3}kL^3 & \frac{3kL^2}{2} \\ kL & \frac{3}{2}kL^2 & kL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_C \\ \varphi \\ \Delta w_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3F \\ \frac{7}{2}FL \\ 2F \end{bmatrix}$$

nella quale la matrice risulta simmetrica in ragion della scelta delle incognite e della corrispondente scrittura delle equazioni.

In termini numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} 129600 & 6.9984\cdot 10^{8} & 64800 \\ 6.9984\cdot 10^{8} & 5.03885\cdot 10^{12} & 5.2488\cdot 10^{8} \\ 64800 & 5.2488\cdot 10^{8} & 64800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_c \\ \varphi \\ \Delta w_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78000 \\ 1.914\cdot 10^{8} \\ 52000 \end{bmatrix}$$

da cui

$\cancel{w_C = 0.401235\ mm\ ;\ \varphi = 0\ ;\ \Delta w_B = 0.401235}$

$w_C = 0.00621148\ mm$; $\varphi = 0.0000877829$; $\Delta w_B = 0.0852161\ mm$

da cui le risultanti delle reazioni del terreno valgono:

$R_1 = 402.504\ N$; $R_2 = 15858.5\ N$; $R_3 = 36641.5\ N$

$R_4 = 153582\ N$ $N_\varphi = 10239\ N$

Andamento degli spostamenti

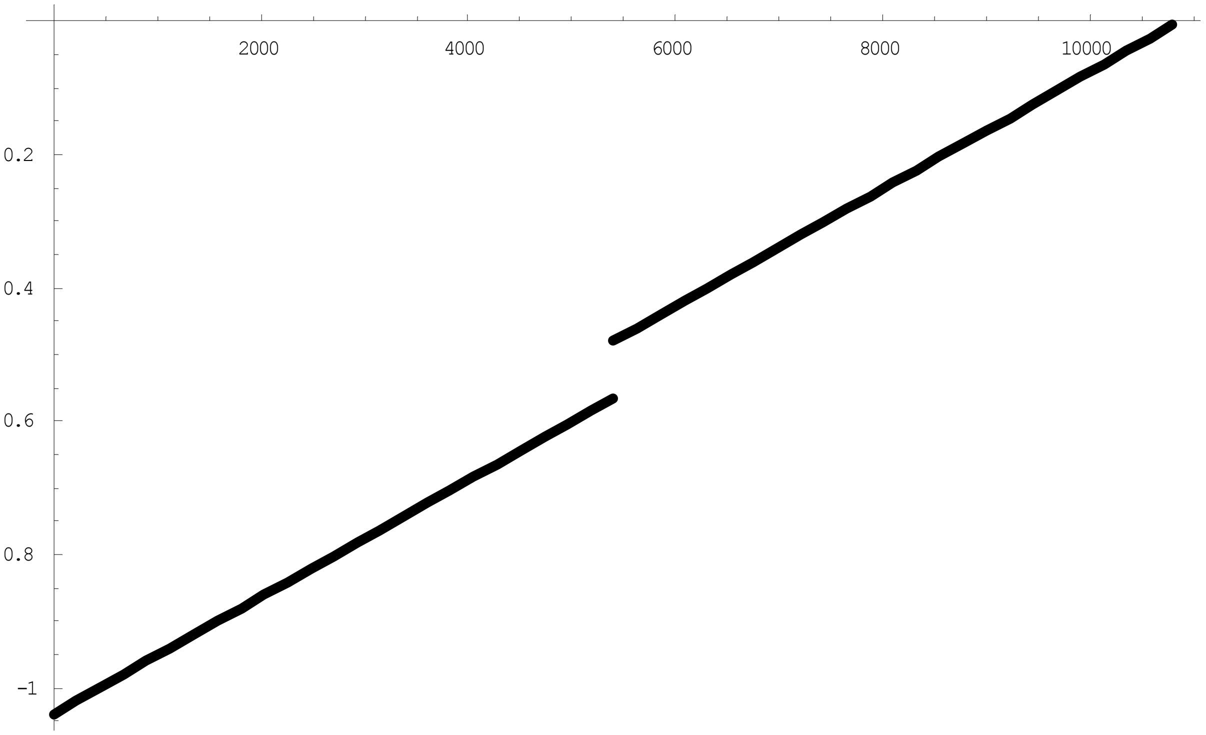


Diagramma del Taglio

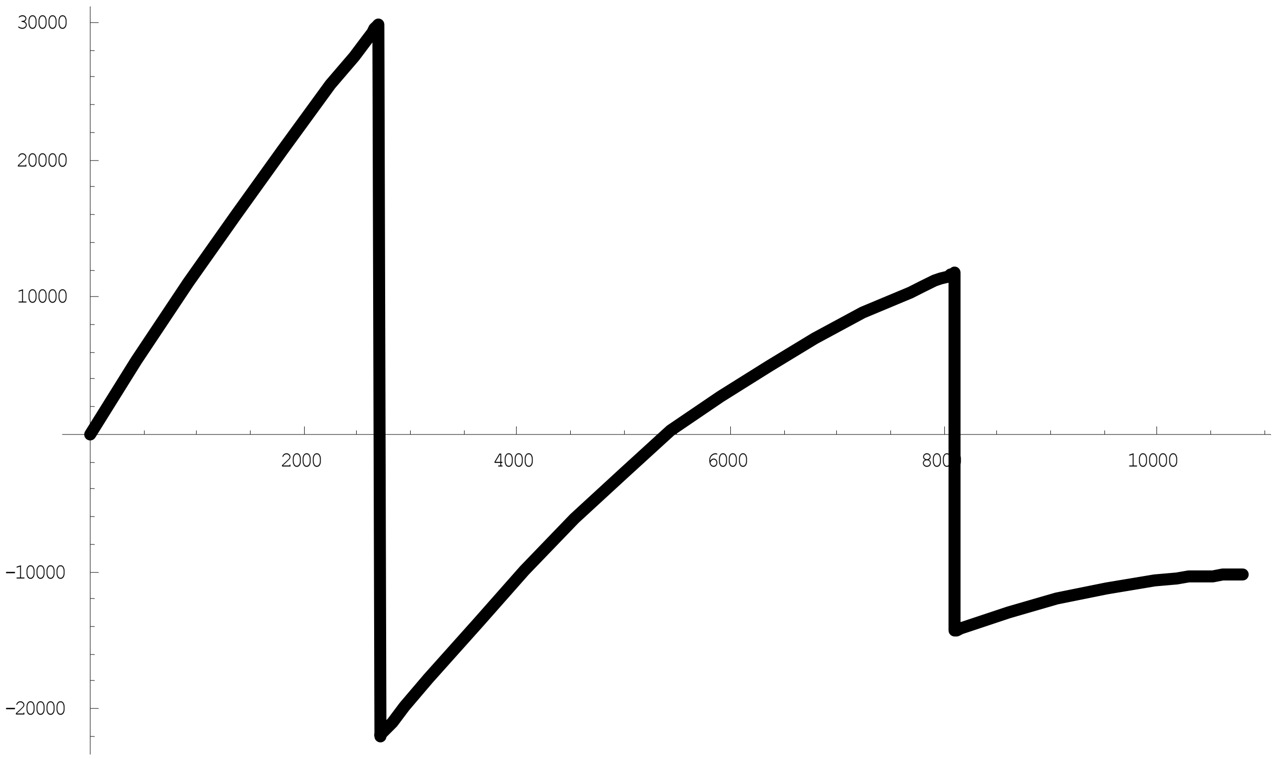


Diagramma del Momento Flettente